1.2 Netler ve Filtreler (Ağlar ve Süzgeçler)

$(I, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Keyfi $\alpha, \beta \in I$ için $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \gamma$ koşulunu sağlayan bir $\gamma \in I$ bulunabilirse, I kümesine <u>yönlü</u> (directed) <u>küme</u> denir.

Tam sıralı bir küme yönlü bir kümedir. Çünkü verilen herhangibir $\alpha, \beta \in I$ için $\alpha \leq \beta$ veya $\beta \leq \alpha$ dır. $\alpha \leq \beta$ ise $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \beta$ olduğundan I yönlü kümedir.

Uyarı: $\alpha, \beta \in I$ için $\sup\{\alpha, \beta\}$ olmayabilir. Örneğin $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' \text{ var}\}$ kümesinde $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$ ile verilsin. $f(x) = x$ ve $g(x) = -x$ fonksiyonlarının $\sup\{f, g\} = |x|$ dir. Fakat $|x| \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dir.

Örnekler: 1) Doğal kısmi sıralama bağıntıları ile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ yönlü kümelerdir.

2) X herhangibir küme ve $I = 2^X$ kümesinde kısmi sıralama $\subset$ (kapsama) bağıntısı ile verilsin. Keyfi $A, B \in I$ için $C = A \cup B$ olmak üzere $A \leq C$ ve $B \leq C$ olduğundan I yönlü kümedir. Ama, tam sıralı küme değildir.

3) X herhangibir küme ve $I = 2^X$ kümesinde kısmi sıralama $\supset$ (ters kapsama) bağıntısı ile verilsin. Yani $A \leq B \Leftrightarrow A \supset B$ dir. Keyfi $A, B \in I$ için $C = A \cap B$ olmak üzere $A \leq C$ ve $B \leq C$ olduğundan I yönlü kümedir. (Daha doğru yazılış ile $(I, \leq)$ yönlü kümedir.)

X herhangibir küme ve I yönlü bir küme olsun. I'dan X'e giden herhangibir $x : I \to X$ fonksiyonuna X'de bir <u>net</u> denir. $x(\alpha)$ genellikle x_α ile gösterilir ve netin kendisi de genellikle $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ile gösterilir.

Örnekler: 1) Herhangi bir dizi nettir. Net, dizilerin genellemesidir.

2) $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad x_\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ $\mathbb{R}$'de bir nettir.

Eğer, herhangi $\alpha, \beta \in I$ için $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \gamma$ şartlarını sağlayan P özelliğine sahip x_γ olacak şekilde bir $\gamma \in I$ bulunabiliyorsa, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ netine <u>eşsonlu</u> (cofinally) <u>P özelliğine sahip</u> denir.

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ netinin eşsonlu özelliğe sahip olması için gerek ve yeter şart verilen $\alpha \in I$ için $\alpha \leq \beta$ ve x_β P özelliğine sahip olacak şekilde bir $\beta \in I$'nın olmasıdır. (bulunmasıdır)

$(I, \leq)$ bir yönlü küme ve $J \subset I$ olsun. Herhangi $\alpha \in I$ için $\alpha \leq \beta$ olacak şekilde $\beta \in J$ varsa J'ye I'da <u>eşson</u> (cofinal) denir.

$(I, \leq)$ bir yönlü küme ve $x : I \to X$ bir net olsun. $(J, \leq')$ başka bir yönlü küme ve $k : J \to I$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

i) $j_1, j_2 \in J$ ve $j_1 \leq' j_2 \Rightarrow k(j_1) \leq k(j_2)$

ii) $\forall \alpha \in I$, $\exists\, j \in J$ $\alpha \leq k(j)$.

Yani, k sıralamayı koruyan I'da bir net olarak düşünülebilir. $x o k : J \to X$ de bir nettir. J'den X'e giden $x o k$ bileşke fonksiyonuna $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ netinin bir <u>altneti</u> denir. $\alpha_j = k(j)$ alınırsa $\{x_{\alpha_j}\}_{j \in J}$ ile gösteririz.

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$'nın bir altneti $\{x_{\alpha_j}\}_{j \in J} \Leftrightarrow$ i) $j_1 \leq j_2 \Rightarrow \alpha_{j_1} \leq \alpha_{j_2}$ ii) $\forall \beta \in I$, $\exists\, j \in J$ $\beta \leq \alpha_j$

Her x_{α_j}, aynı zamanda bazı β'lar için x_β dır ve x_β'nın kümesinde x_{α_j} eşson olma özelliğine sahiptir.

Örnekler: 1) $\mathbb{N}$'de bir F alt kümesinin $\mathbb{N}$'de eşson olması için gerek ve yeter şart F'nin sonsuz olmasıdır.

2) $J = \mathbb{R}$ ve $I = \mathbb{N}$ alalım. Doğal sıralamaları ile $(\mathbb{R}, \leq)$ ve $(\mathbb{N}, \leq)$ yönlü kümelerdir. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $j \to \infty$ iken $k(j) \to \infty$ olacak şekilde herhangi bir fonksiyon olsun. $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{R}}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir alt netidir.

Uyarı: 1) X'de herhangi bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, X'de bir nettir. Fakat X'de bir net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ bir dizi olmayabilir.

2) Bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin, alt dizisi olmayan, $\{x_{n_j}\}_{j \in I}$ alt netleri olabilir.

Filtreler

Genel topolojik uzaylarda, yakınsaklık kavramına yaklaşımın diğer bir yoluda filtrelerdir. (Net ve filtreler arasındaki yaklaşımlar derste ayrıntılı anlatılacaktır.)

X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki iki şartı sağlayan 2^{2^X}'in bir $\mathbb{B}$ elemanına (Yani $\mathbb{B}$, X'in bir alt kümeler ailesidir.) X üzerinde $(\mathbb{B} \subset 2^X)$

bir filtre bazı denir.

1) $\mathbb{B} \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathbb{B}$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ için $\exists B_3 \in \mathbb{B}$: $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Örnekler: 1) X boş olmayan herhangi bir küme ve $\mathbb{B} = \{x\}$ olsun. $\mathbb{B}$, X üzerinde bir filtre bazdır.

2) $X = \mathbb{N}$, $F_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ ve $\mathbb{B} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alalım. $\mathbb{B}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre bazdır.

3) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$'de bir dizi ve $B_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ olsun. $\mathbb{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir filtre bazdır.

4) $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{B} = \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ ve $\mathbb{B}' = \{(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}$ üzerinde birer filtre bazlardır.

Uyarılar: $\mathbb{B}$, X üzerinde bir filtre baz olsun.

1) $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ ise $B_1 \cap B_2$ boş küme olamaz. Çünkü, $B_1 \cap B_2$ bir B_3 elemanını içeriyor ve $\emptyset \notin \mathbb{B}$ dir

2) Buna göre, $B \in \mathbb{B}$ ise $B^c = X - B$, $\mathbb{B}$'nin elemanı olamaz.

3) $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathbb{B}$ ise $B_{n+1} \subset B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ olacak şekilde $B_{n+1} \in \mathbb{B}$ vardır.

5) $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, X'de bir kümeler ailesi olsun. $|I|$ sembolü ile I'nın bütün sonlu alt kümeler ailesini gösterelim. Yani $|I| = \{F \in 2^I \mid F \text{ sonlu}\}$. Her $F \in |I|$ için B_F'i $B_F = \bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha$ ile tanımlayalım. Her $F \in |I|$ için $B_F \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathbb{B} = \{B_F \mid F \in |I|\}$, X üzerinde bir filtre bazdır.
(Gerçekten, $\mathbb{B} \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathbb{B}$ dir ve $F_1, F_2 \in |I|$ için $F_3 = F_1 \cup F_2 \in |I|$ alınırsa $B_{F_3} \subset B_{F_1} \cap B_{F_2}$ dir.)

6) $\mathbb{B}$, X üzerinde bir filtre baz ve $M \subset X$ olsun. $\mathbb{B}_M = \{B \cap M \mid B \in \mathbb{B}\}$ nin M'de bir filtre baz olması için gerek ve yeter şart her $B \in \mathbb{B}$ için $B \cap M \neq \emptyset$ olmasıdır.

7) $\mathbb{B}$, X üzerinde bir filtre baz, Y herhangi bir küme ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\tilde{\mathbb{B}} = \{f(B) \mid B \in \mathbb{B}\}$, Y üzerinde bir filtre bazdır.

8) Y herhangibir küme, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathbb{B}'$, Y'de bir filtre baz olsun. $\mathbb{B}_0 = \{f^{-1}(B') \mid B' \in \mathbb{B}'\}$'in X'de bir filtre baz olması için gerek ve yeter şart her $B' \in \mathbb{B}'$ için $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ olmasıdır. ($\Leftrightarrow$ her $B' \in \mathbb{B}'$ için $B' \cap f(X) \neq \emptyset$ olmasıdır.)

X herhangibir küme olsun. Aşağıdaki üç şartı sağlayan 2^{2^X} in bir $\mathbb{F}$ elemanına, X üzerinde bir filtre denir.

1) $\mathbb{F} \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathbb{F}$.

2) $\forall F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ için $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$.

3) $A \in 2^X$, $F \in \mathbb{F}$ ve $F \subset A$ ise $A \in \mathbb{F}$.

Açıktırki, X üzerinde herhangi bir filtre, X üzerinde bir filtre bazdır.

Örnekler: 1) X'in boş olmayan bir A kümesini içeren, X'in bütün alt kümeler ailesi X üzerinde bir filtredir. ($\emptyset \neq A \subset X$ ve $\mathbb{F} = \{F \in 2^X \mid A \subset F\}$ ise $\mathbb{F}$, X'de bir filtredir.)

2) X sonsuz bir küme olsun. X'in sonlu alt kümelerinin bütünleyenleri bir filtrenin elemanlarıdır. (Yani $\mathbb{F} = \{F \in 2^X \mid F = A^c$, A sonlu$\}$, $\mathbb{F}$, X'de bir filtredir.) $\mathbb{F} = \{F \in 2^{\mathbb{N}} \mid F = A^c;\ F$ sonlu $\subset \mathbb{N}\}$ filtresine Frechet filtresi denir.

3) $\mathbb{B}$, X üzerinde herhangi bir filtre baz ve $\mathbb{F}(\mathbb{B}) = \{F \in 2^X \mid F, \mathbb{B}$'de bir B'yi içerir (kapsar)$\}$ olsun. Yani $F \in \mathbb{F}(\mathbb{B}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{B}$, $B \subset F$ dir. $\mathbb{F}(\mathbb{B})$, X üzerinde bir filtredir. Bu filtreye $\mathbb{B}$ ile üretilen filtre denir.

4) $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, X üzerinde bir net ve her $\alpha \in I$ için $B_\alpha = \{x_\beta \mid \alpha \leq \beta\}$ olsun. $\mathbb{B} = \{B_\alpha \mid \alpha \in I\}$, X üzerinde bir filtre bazdır. Bu filtre baz ile üretilen filtreye (tekdir), $\mathbb{F} = \{F \mid F, \mathbb{B}$'de bir B_α'yı içerir$\}$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ neti ile üretilen filtre denir.

$\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$ ise $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$'ye göre daha zayıf veya $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1$'e göre daha kuvvetli denir.

Bir X kümesi üzerinde bir maksimal filtreye, X üzerinde ultrafiltre denir. ($\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre ise $\mathbb{F}$'den daha kuvvetli $\mathbb{F}_1$ filtresi ($\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_1$) için, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$ dir.)

Filtreler $\subset$ (kapsama) bağıntısı ile bir zincir oluşturduğundan, Zorn lemmaya göre maksimal eleman vardır. Buna göre:

Teorem: $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre ise $\mathbb{F}$'den daha kuvvetli bir ultrafiltre vardır.

Örnek: $x_0 \in X$ ve $\mathbb{F} = \{F \in 2^X \mid x_0 \in F\}$ olsun. $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltredir. $\mathbb{F}_1$ bir filtre ve $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_1$ ise $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathbb{F}_1 \neq \mathbb{F}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda öyle bir $F_1 \in \mathbb{F}_1$ vardır ki $F_1 \notin \mathbb{F}$, yani $x_0 \notin F_1$ dir. $F = X - F_1$ alınırsa, $x_0 \in F$ olduğundan $F \in \mathbb{F}$ dir. $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_1$ olduğundan, aynı zamanda, $F \in \mathbb{F}_1$ dir. F_1 ve $F_1^c = F$, $\mathbb{F}_1$'de olduğundan ($F_1 \in \mathbb{F}_1$ ve $F_1^c \in \mathbb{F}_1$) $F_1 \cap F_1^c = \emptyset \in \mathbb{F}_1$ olmalıdır. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$ dir. Yani, örnekte verilen $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltredir.

Teorem: $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre olsun. A ve B, $A \cup B \in \mathbb{F}$ olacak şekilde X'in alt kümeleri ise $A \in \mathbb{F}$ veya $B \in \mathbb{F}$ dir.

Teoremin terside doğrudur: $\mathbb{F}$, bir X kümesi üzerinde bir filtre $A, B \in 2^X$ ve $A \cup B \in \mathbb{F}$ iken $A \in \mathbb{F}$ veya $B \in \mathbb{F}$ ise $\mathbb{F}$ bir ultrafiltredir.

Sonuç: X üzerinde bir $\mathbb{F}$ filtresinin ultrafiltre olması için gerek ve yeter şart verilen bir $A \in 2^X$ kümesi için $A \in \mathbb{F}$ veya $A^c \in \mathbb{F}$ olmasıdır.

Teorem: X ve Y herhangi iki küme, $f: X \to Y$ üzerine bir fonksiyon ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir ultrafiltre olsun. Bu durumda, $\mathbb{F}_1 = \{f(F) \mid F \in \mathbb{F}\}$, Y üzerinde bir ultrafiltredir.